162 — Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b\in\mathbb{K}^n$, $p\in\mathbb{N}$

I] Systèmes d'équations linéaires et méthode du pivot de Gauss

1] Mise en place du problème

[Gri] II.1

Définition 1 : On appelle système linéaire à p équations et n inconnues un système du type : $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1+\dots+a_{p,n}x_n=b_p\end{cases}$: (S) avec $a_{i,j}, b_i\in\mathbb{K}$ et x_i inconnues.

Proposition 2 : Le système précédent peut s'écrire matriciellement $AX=B$ avec $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $X,B\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^p$

Exemple 3 : Le système $\begin{cases}x+3y=3\\4x-y=-4\\-x+5y=4\end{cases}$ peut se représenter sous forme matricielle en $AX=B$ avec
$A=\begin{pmatrix}1&3\\4&-1\\-1&5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}$.

Notation 4 : On note $L_1;\dots;L_p$ les lignes de la matrice ou du système considéré.

Définition 5 : On dit qu'une matrice ou un système est échelonné si les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.

Exemple 6 : (1) $\begin{pmatrix}2&3&1&0&1&2&6\\0&0&7&1&8&2&0\\0&0&0&0&0&6&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ est échelonnée

(2) $\begin{pmatrix}1&3&1&0&1&5&9\\0&0&7&1&8&2&0\\0&0&5&1&0&6&2\\0&0&0&0&3&2&6&5\end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée.

2] Méthode du pivot de Gauss

[NR]

Définition 7 : Soit $i\neq j\in[\![1;n]\!]$. On définit les opérations élémentaires suivantes : soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $E_{i,j}=\begin{pmatrix}0&&(0)\\&1&\\(0)&&0\end{pmatrix}$ ← $i$ème ligne, ↑ j-ème colonne

[NR]

Nom	Transvection	Dilatation	Permutation
Matrice	$T_{i,j}(\lambda)=I_n+\lambda E_{i,j}$	$D_i(\lambda)=I_n+(\lambda-1)E_{i,i}$	$P_{i,j}=I_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i}$
Déterminant	1	λ	-1
Action à gauche	$L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$	$L_i\leftarrow\lambda L_i$	$L_i\leftrightarrow L_j$
Action à droite	$C_j\leftarrow C_j+\lambda C_i$	$C_i\leftarrow\lambda C_i$	$C_j\leftrightarrow C_i$
Inverse	$T_{i,j}(-\lambda)$	$D_i(\frac{1}{\lambda})$	$P_{i,j}$

Théorème 8 : Les solutions du système (S) sont stables par les opérations élémentaires définies précédemment.

[Gri] II.1

Théorème 9 : (d'élimination de Gauss) Il existe $M\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que MA est triangulaire supérieure.

Proposition 10 : Un procédé pour obtenir cette matrice MA est :
(1) Soit $A^{[1]}=A$ et $\tilde{A}^{[1]}=P^{[1]}A^{[1]}$ de telle sorte que le premier coefficient $\tilde{a}^{[1]}_{1,1}$ est non-nul, avec $P^{[1]}$ matrice de permutation
On obtient $A^{[2]}=T_{n,1}\left(-\frac{\tilde{a}^{[1]}_{n,1}}{\tilde{a}^{[1]}_{1,1}}\right)\times\dots\times T_{2,1}\left(-\frac{\tilde{a}^{[1]}_{2,1}}{\tilde{a}^{[1]}_{1,1}}\right)\tilde{A}^{[1]}$
de la forme $\begin{pmatrix}\tilde{a}^{[1]}_{1,1}&\\0&\\\vdots&\boxed{(*)}\\0&\end{pmatrix}$.
(2) On répète le même procédé avec $A^{[k]}$ pour $k\in[\![2;n]\!]$.

[All]

Remarque 11 : (1) On ne calcule pas M !
(2) Si A n'est pas inversible, alors on tombe sur un pivot nul et alors on ne peut pas résoudre le système.
(3) En pratique, on choisit le plus grand pivot $|\tilde{a}^{[k]}_{i,i}|$ pour minimiser les erreurs d'arrondi.

3] Application aux familles libres et aux familles génératrices

[Gri] II.3

Proposition 12 : Soit $v_1;\dots;v_n\in(\mathbb{R}^n)^n$.
Alors : la méthode du pivot de Gauss permet de savoir si $(v_1;\dots;v_n)$ est libre.

Exemple 13 : Pour $v_1=\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}$; $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$; $v_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, la méthode du pivot de Gauss indique que $(v_1;v_2;v_3)$ est libre.

II.3 [Gri]

Proposition 14 : Soit $(v_1;\dots;v_n)\in(\mathbb{R}^n)^n$

Alors : la méthode du pivot de Gauss permet de savoir s'il existe des relations linéaires entre les v_i.

Exemple 15 : Pour, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$; $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$; $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $v_4=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\8\end{pmatrix}$, on a : $v_1+v_2-v_3=0$ et $3v_1+2v_2-v_4=0$.

Proposition 16 : La méthode du pivot de Gauss permet de vérifier si un vecteur appartient à l'espace engendré par $v_1;\dots;v_p$ et si oui, donner une expression du vecteur.

Exemple 17 : Pour $v=\begin{pmatrix}3\\9\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$; $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\-1\end{pmatrix}$; $v_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, on a : $v=v_1+3v_2-2v_3$

Remarque 18 : On peut aussi déterminer si une famille est génératrice, déterminer une base d'intersection d'espaces et trouver les équations d'un sous-espace.

II] Méthodes directes de résolution de $Ax=b$

1] Méthodes de Cramer et de Gauss

V.1

Proposition 19 : Soit $A=(c_1|\dots|c_n)\in GL_n(\mathbb{K})$

Alors : La solution de $Ax=b$ est donné par : $\forall i\in[\![1;n]\!]$,

$$x_i=\frac{\det(c_1|\dots|c_{i-1}|b|c_{i+1}|\dots|c_n)}{\det(A)}$$

Remarque 20 : Cette méthode de résolution coûte à la machine $O(n!)$ opérations arithmétiques.

VI.1 [All]

Proposition 21 : En reprenant les notations du théorème 9, les solutions de $Ax=b$ sont les solutions de $A^{[n]}x=\Pi b$ avec $A^{[n]}$ matrice triangulaire supérieure.

Exemple 22 : Soit $A=\begin{pmatrix}2&4&-4&1\\3&6&1&-2\\-1&1&2&3\\1&1&-4&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\-7\\4\\2\end{pmatrix}$, $A^{[4]}=\begin{pmatrix}2&4&-4&1\\0&3&0&\frac{3}{2}\\0&0&7&-\frac{7}{2}\\0&0&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $b'=\begin{pmatrix}0\\4\\-7\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$. Les solutions de $Ax=b$ sont celles de $A^{[4]}x=b'$.

2] Méthode par décomposition LU, de Cholesky et par factorisation QR

VI.2 [All]

Théorème 23 : (de décomposition LU) Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$ tel que : $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\Delta^k:=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\dots&a_{1,k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k,1}&\dots&a_{k,k}\end{pmatrix}\in GL_k(\mathbb{K})$.

Alors : $\exists!(L;U)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec U triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale tels que :

$$A=LU.$$

Proposition 24 : Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$ et sa décomposition $LU=A$.

Alors : pour résoudre $Ax=b$, on calcule y solution de $Ly=b$ puis la solution x de $Ux=y$.

Remarque 25 : L'hypothèse sur A est vérifiée par les matrices symétriques définies positives.

VI.3

Théorème 26 : (de factorisation de Cholesky) Soit $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors : $\exists!B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid B$ est triangulaire inférieure de diagonale positive telle que $A=B\,{}^tB$

Remarque 27 : Dans la pratique, on n'a pas besoin de vérifier que A est définie positive mais uniquement que A est symétrique.

VI.4

Théorème 28 : (de factorisation QR) Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$.

Alors : $\exists!(Q;R)\in O_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid$ avec R triangulaire supérieure à diagonale positive telles que : $A=QR$.

Proposition 29 : Dans ce cas, puisque $Q^{-1}={}^tQ$, pour résoudre $Ax=b$, on résout $Rx={}^tQb$ avec R triangulaire.

Remarque 30 : Cette factorisation se généralise aux matrices rectangulaires ou carrées non-inversibles.

Remarque 31 : Les méthodes de résolution de Gauss, LU, Cholesky et QR requièrent de $O(n^3)$ opérations arithmétiques à la machine.

VIII.1 [All]

III] Méthodes itératives de résolution de $Ax=b$

1] Cadre de résolution

Définition 32 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière de A tout couple $(M,N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$.
On appelle méthode itérative basée sur une décomposition régulière (M,N) est la suite $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.
On dit que la méthode itérative converge si $\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$, $x_k \xrightarrow[+\infty]{} x$ avec $Ax = b$.

Proposition 33 : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Alors : $\rho(A) \leq \|A\|$ et réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ telle que $\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$

Lemme 34 : $\lim_{i \to +\infty} A^i = 0$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim A^i x = 0$
ssi $\rho(A) < 1$
ssi il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

Théorème 35 : Une méthode itérative converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Remarque 36 : En pratique, calculer $\rho(M^{-1}N)$ n'est pas évident.

Théorème 37 : Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et (M,N) une décomposition régulière de A : $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
Alors : $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$
Si de plus, $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

2] Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

V.2 [C?]

Soit pour la suite $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
On souhaite décomposer la matrice A pour en donner une décomposition régulière :

Méthode	$A = M - N$	$M^{-1}N$	itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F)$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D-E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation	$A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

Remarque 38 : Les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation requièrent de $O(n^2)$ opérations arithmétiques par itération à la machine.

V.2 [Cia]

Références :

[Gri] Algèbre linéaire - Grifone

[NR] No Reference ¨^

[All] Algèbre linéaire numérique - Allaire

[Cia] Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation - Ciarlet